## Лекция 2

**Момент силы относительно оси**

Теорема о проекциях (см. лекцию 1) позволяет ввести в рассмотрение новую характеристику силы по отношению к оси. ***Моментом силы F относительно оси z*** называется алгебраическая величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно произвольной точки указанной оси.

Рассмотрим способ вычисления и свойства момента относительно оси. Пользуясь произволом выбора центра моментов на оси, выберем в качестве такового т.О- проекцию точки А приложения силы на ось z. Обозначив через **k** орт оси z, и применив круговую перестановку в смешанном произведении, запишем

z

h

**k**

**τ**

**k** x **OA**

**F**

A

α

**+**

O

Рис.1

Здесь учтено, что произведение направленно вдоль τ по правилу правого винта. Его модуль равен расстоянию ОА = h от точки приложения сил до оси.

Формула (2) показывает, что:

1. Момент силы относительно оси дает только составляющая силы, направленная по касательной t к окружности радиуса h.
2. Знак момента определяется знаком Cosα. Из Рис.1 вытекает

следующее правило знаков:

***Момент силы относительно оси положителен, если с конца оси видно,***

***что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки****.*

Из формулы (2) вытекает, что момент силы относительно оси равен нулю в случае, если сила и ось лежат в одной плоскости (α=/2). Это происходит, когда

1. сила параллельна оси
2. линия действия силы пересекает ось

Вы это ощущаете, поднимая воротом ведро из колодца, и поэтому стараетесь приложить силу руки так, чтобы создать большее плечо.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

## Алгебраический момент силы относительно центра для плоской системы сил.

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется ***плоской***. Совместим плоскость xy с плоскостью действия сил. В этом случае силы создают момент только относительно оси оси z, перпендикулярной плоскости действия сил. Совмещая плоскость сил с плоскостью листа, читатель видит направленную к нему ось z как точку O и называет момент относительно оси z ***алгебраическим моментом силы относительно точки O***

О

х

z

y

**Fk**

**mo**(**Fk**)

Рис.2

Правило знаков:

Момент положителен, если видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

## 

#### Главный момент системы сил.

#### Зависимость главного момента от центра.

***Главным моментом*** системы сил {**F**} относительно центра А называется вектор **MA** , равный векторной сумме моментов всех сил системы относительно этого центра.

Аналитически главный момент находят по его проекциям на декартовы оси

которые логично назвать главными моментами системы сил относительно осей x, y, z. По ним легко найти модуль и направление главного момента:

Найдем зависимость между главными моментами относительно двух центров А и В. Суммируя полученную ранее зависимость для одной силы по всем силам системы, получим:

Здесь учтено определение главного вектора

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Видим, что в отличие от момента одной силы, главный момент системы сил может не зависеть от центра в случае, если главный вектор системы окажется равным нулю.

если

(5)

**Вращательная система сил.**

**Пара сил.**

Назовем систему сил с нулевым главным вектором ***вращательной системой.*** Название можно объяснить тем, что такая система придает вращение свободному покоящемуся телу, оставляя его центр тяжести в покое. Формула (4) показывает, что главный момент вращательной системы не зависит от центра.

**m**

**F**

**F’**

B

A

h

O

Рис.3

П

Простейшей вращательной системой является  ***пара*** сил: ***система двух равных по модулю противоположно направленных сил, не лежащих на одной прямой***. Расстояние h между линиями действия сил пары называется ***плечом пары***. Главный вектор сил пары равен нулю, поэтому ее главный момент не зависит от центра О и называется ***моментом пары m*** . Он может быть найден как момент одной из сил пары относительно точки приложения второй силы.

Момент пары перпендикулярен плоскости пары и направлен в сторону, откуда видно, что пара стремится повернуть тело против часовой стрелки.

# Условия сохранения покоя дискретной механической системы.

## Дискретной механической системой называется счетное множество взаимодействующих между собой и с миром материальных точек с массами . Движение системы рассматривается по отношению к некоторой системе отсчета. Системой отсчета называется пространство, с которым связан наблюдатель, умеющий измерять расстояния и время.

## Покой есть равенство нулю скоростей точек системы по отношению к данной системе отсчета. В статике нас интересуют условия сохранения покоя механической системы, иначе говоря отсутствия ускорений точек. Логично сначала изучить условия покоя одной из точек системы. Они вытекают из принципов (аксиом) механики.

## Принципы (аксиомы) механики.

## Условия сохранения покоя точки.

Как все точные науки, механика базируется на недоказуемых постулатах, вытекающих из опыта и называемых ***аксиомами***. Являющиеся плодом размышлений многих поколений исследователей, аксиомы механики были окончательно сформулированы ***Исааком Ньютоном*** в 17 веке и поэтому носят его имя. Основные законы Ньютона наглядно демонстрируются в фильме

<http://www.youtube.com/watch?v=iH48Lc7wq0U&feature=related>

### *Принцип инерции Галилея*

***Существует система отсчета, называемая «инерциальной», в которой изолированная точка сохраняет состояние покоя (или прямолинейного равномерного движения)***.

***Изолированной*** называется абстрактная точка, не взаимодействующая с другими точками.

До Галилея считалось, что для равномерного движения (телеги) нужна сила.

Все законы механики формулируются и справедливы только в инерциальной системе отсчета.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

1. ***Основной принцип*** *(второй закон Ньютона)*

***Ускорение материальной точки пропорционально действующей***

***на нее силе и обратно пропорционально массе точки***

***Следствие 1:*** *В инерциальной системе отсчета покой точки может быть нарушен только действием силы* ***F*** *.*

### *Следствие 2: Задать одновременно силу и ускорение невозможно.*

### *Принцип внутренней аддитивности (третий закон Ньютона).*

### *Свойства внутренних сил.*

***Воздействие среды на материальную систему равно векторной сумме ее воздействий на части системы.***

Для простоты рассмотрим материальную систему всего двух точек М1 и М2. Обозначим равнодействующие внешнего воздействия на М1 через **F1** а на М2 через **F2 .** Кроме внешнего воздействия, точки взаимодействуют между. Обозначим воздействие точки М1 на М2 через **Fi** а М2 на М1 через **Fi’**

Внешнее воздействие на систему равно **.** Воздействиена точку М1 равно **.** Воздействиена точку М2 равно Согласно принципу

Отсюда вытекает , или

- известный «***принцип равенства действия и противодействия***»:

***Силы взаимодействия двух точек равны по модулю, противоположны***

***по направлению и лежат на прямой, проходящей через точки.***

Силы взаимодействия точек материальной системы называются внутренними (индекс **i**).

***Следствие- Свойства внутренних сил***  Внутренние силы парны, значит их главный вектор и главный момент равны нулю.

(11)

### *Принцип внешней аддитивности (правило сложения сил)*

***Действие среды на точку равно сумме действий частей среды.***

**F= F1+ F2**

**F2**

**F1**

Рис.4

Пусть среда из n материальных точек действует на изучаемую точку М силами **Fk** (k=1,2…n).

Принцип утверждает, что воздействие среды на точку можно заменить одной силой **F**, равной сумме сил, с которыми точки среды действуют на изучаемую точку.

Системы сил, вызывающие одинаковые ускорения, назовем  ***эквивалентными***. Сила, эквивалентная системе сил, называется ***равнодействующей.*** Значит любая система сил {**Fk },** приложенных к точке,имеет равнодействующую

Для двух сил принцип дает ***правило параллелограмма*** (Рис.4):

{**F1 F2} ~** **F = F1 + F2**

***Следствие 1:***  Второй закон Ньютона можно обобщить на случай действия нескольких сил

***Следствие 2: Необходимое и достаточное условие сохранения покоя точки есть равновесие сил, приложенных к точке***

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Таким образом, в покое остается не только изолированная точка, но и точка под действием системы сил, сумма которых равна нулю. Многоугольник сил будет замкнутым.

Необходимость условия (9) означает, что если точка находится в покое, то условие (9) выполнено. При этом среди сил должны быть неизвестные, которые можно найти из уравнения (9). Так, силы, действующие на люстру, удовлетворяют условию (9), поскольку люстра находится в покое. Из двух сил, действующих на люстру нам известна только сила тяжести люстры. Из соотношения (9) мы находим, что натяжение троса равно по модулю и противоположно по направлению силе тяжести люстры.

Достаточность означает, что если все силы заданы, то с помощью (9) можно проверить останется ли точка в покое. Скажем, мы знаем, что к точке приложены две силы. Составив их сумму (9), мы поймем, что равновесие возможно только при парности сил.

***Следствие 3: Сила может возникнуть не только как следствия инертности тела, но и как реакция на другую силу.*** Так натяжение троса, на котором висит люстра, определяется только силой тяжести люстры.

Условия сохранения покоя произвольной дискретной системы.

Необходимые условия равновесия внешних сил.

Рассмотрим дискретную систему n материальных точек. Система находится в покое, если все ее точки находятся в покое. При этом силы, действующие на каждую точку, находятся в равновесии.

Обозначим через Fkе равнодействующую внешних сил, приложенных к точке с номером к, а через Fki- равнодействующую внутренних сил этой точки. Из аксиом вытекает, что условия

обеспечивают покой системы и являются *необходимыми и достаточными условиями* равновесия сил, приложенных к произвольной дискретной механической системе.

Любая часть или комбинация условий (12) будет не достаточным, но необходимым условием покоя системы. Например, одно из условий (12) для точки с номером является необходимым и достаточным для этой точки, и только необходимым, но не достаточным для всей системы.

Свойства неизвестных внутренних сил позволяют составить *необходимые условия покоя только для внешних сил.*

Суммируя (12) по k, и учитывая, что главный вектор внутренних сил равен нулю, получаем

Векторно умножив слева (12) на радиус-вектор точки rk, после суммирования получим второе условие

Условия для внешних сил системы

(13)

с необходимостью выполнены для любой покоящейся системы. Систему внешних сил, удовлетворяющую условиям (13), назовем *уравновешенной системой.*

Факт неподвижности системы превращает выражения (13) в уравнения для определения неизвестных сил. Таковыми в статике чаще всего являются реакции связей.

Далее будет показано, что только для *твердого тела* условия (13) являются также и *достаточными* условиями сохранения покоя.